AMBIENTE DE INVESTIGAÇÃO: ANÁLISE DE UM PROBLEMA TIPICAMENTE ESCOLAR

Airton Carrião – Kelly Maria de C. F. A. de L. Melillo – Paula Resende Adelino – Nora O. C. Zúñiga.
airtoncarriao@gmail.com – kellyfornero@yahoo.com.br – pauladelino@yahoo.com.br – ncabrerazuniga@gmail.com
Colégio Técnico da Universidade Federal de Minas Gerais – Brasil

Tema: II.2- A resolução de problemas como veículo de aprendizagem matemática.
Modalidade: Comunicação Breve (CB)
Nível Educativo: Médio (11 a 17 anos)
Palavras-chave: Cenários para Investigação, Investigação Matemática, Ambientes de Investigação.

Resumo

Este trabalho visa discutir de que maneira uma abordagem dada a um problema tipicamente escolar pode propiciar o desenvolvimento de um ambiente de investigação em sala de aula. Para isso, a metodologia prevê um estudo da bibliografia relacionada à Investigação Matemática e Cenário para Investigação, e a análise do enfoque dado a um problema, em uma sala de aula de Matemática de uma escola técnica federal brasileira. Para Ponte uma Investigação Matemática inclui formulação de questões; produção, análise e refinamento de conjecturas; apresentação, demonstração e discussão dos resultados. Skovsmose, por sua vez, utiliza o conceito de Cenário para Investigação, como aquele em que o aluno é convidado a formular questões e procurar explicações. Para ele, a produção de significado pode ter referência exclusiva à matemática, à semirrealidade ou às situações da vida real. Dialogando com esses dois autores, adotaremos aqui o que chamaremos de Ambiente de Investigação. Com a finalidade de aprofundarmos a discussão, selecionamos para análise um problema que pode ser classificado como de referência a uma semirrealidade. Espera-se que a discussão da abordagem desse problema forneça subsídios para discutir a existência de possíveis contextualizações que possam favorecer, ou não, o desenvolvimento de um Ambiente de Investigação.

Introdução

No final dos anos de 1990 o ensino de Matemática no Coltec começa a passar por uma mudança de perspectiva que, em certa medida, reflete o que ocorre na Educação Matemática. O ensino era, até então, fortemente influenciado pela perspectiva construtivista, com reflexos da perspectiva tecnicista, desde os anos de 1980.

Essa mudança se dá principalmente devido a dois fatores: a renovação do quadro docente, que se iniciou nos anos de 1990; e a percepção da necessidade de mudança no fazer pedagógico, tanto por parte dos alunos, como dos docentes.

Inicialmente começou-se a introduzir a resolução de problemas como estratégia didática. Porém, ainda sob influência do construtivismo, a reflexão sobre a prática aproximou um grupo de professores para uma perspectiva de ensino baseada na Investigação Matemática, tendo como principal referência João Pedro da Ponte. A mudança, ainda em processo, tem buscado organizar o fazer pedagógico a partir de atividades baseadas, especialmente, em problemas com referência à semirrealidade (Skosmove, 2000).

A escola tem como tradição atividades onde os alunos têm participação ativa e, geralmente, trabalham em grupos. Em particular, nas aulas de Matemática, procura-se criar um ambiente de investigação, onde o aluno é estimulado a buscar soluções próprias e a refletir sobre o processo.

Neste texto vamos discutir como o trabalho com um problema tipicamente escolar, com referência à semirrealidade, pode gerar um ambiente de investigação, levando os alunos a criar estratégias de resolução e discutir diferentes perspectivas desse problema.

Investigação Matemática e Cenários para Investigação

A ideia de investigar faz parte do fazer matemático desde os tempos mais remotos. A prática cotidiana de um matemático sempre foi a busca de soluções para problemas em aberto e, nesse processo, realiza-se conjecturas, as verifica, discute com colegas a solução proposta e, por fim, organiza as ideias na forma de demonstração.

Trazer para sala de aula a prática da investigação é, de certa maneira, "aproximar o estudante do matemático". Como apontam Cunha *et al*,

> a realização de actividades de investigação na aula de matemática são importantes porque elas: (a) constituem uma parte essencial da experiência matemática e, por isso, permitem uma visão mais completa desta ciência; (b) estimulam o envolvimento dos alunos, necessário a uma aprendizagem significativa; (c) podem ser trabalhadas por alunos de ciclos diferentes, a níveis de desenvolvimento também diferentes; e (d) potenciam um modo de pensamento holístico (ao relacionarem muitos tópicos), essencial ao raciocínio matemático (1995, p.1).

Para Ponte (2010), uma Investigação Matemática inclui: formulação de questões; produção, análise e refinamento de conjecturas; apresentação, demonstração e discussão dos resultados. Para tanto, deve-se iniciar a atividade com questões interessantes, em relação a situações que precisam ser compreendidas ou um conjunto de dados que precisam ser organizados e explicados em termos matemáticos. Outro ponto fundamental é propiciar a formulação de conjecturas, argumentações e a emergência de novas questões. (PONTE *et al*, 1998).

Para Skovsmose (2000), o aluno deve ser convidado a formular questões e procurar explicações e, aceitando o convite, cria-se um de Cenário para Investigação.

Para os dois autores, é importante criar um ambiente adequado para o trabalho investigativo. Segundo Ponte (2010), uma atividade (exercícios, problemas ou investigações) pode gerar diferentes situações de aprendizagem, dependendo de como é apresentada aos estudantes, de como os alunos aceitam o desafio de trabalhar com ela e, ainda, de como essa proposta é conduzida na sala de aula.

O processo de ensino e aprendizagem na sala de aula de Matemática depende muito das tarefas que o professor apresenta. Para Ponte (2010), as tarefas podem ser subdivididas entre exercício, problema, exploração e investigação. Sendo que, os dois primeiros, são considerados tarefa de estrutura fechada e, os outros dois, são considerados tarefa de estrutura aberta. Cada tarefa apresenta quatro dimensões fundamentais: "(...) o grau de complexidade, a estrutura, o contexto referencial e o tempo requerido para sua resolução" (p. 22).

Com relação ao tempo requerido para sua resolução, Ponte (2010) assume que essa dimensão tem um papel relevante na caracterização das tarefas e pode variar de uma tarefa para outra, podendo demorar uma aula para sua realização, uma curta sequência de aulas ou, até mesmo, levar anos para ser concluída.

Considerando a quarta dimensão, que se refere ao contexto referencial, esse mesmo autor propõe que "a tarefa pode ser contextualizada numa *situação da realidade* ou formulada em termos *puramente matemáticos*" (p. 22, grifo do autor). Skovsmose (2000) também considera esses dois tipos de situações, porém denota-os como "referências à matemática pura" e "referências à realidade". Além disso, ele inclui um terceiro contexto referencial, "referência à semirrealidade":

> (...) a semi-realidade é totalmente descrita pelo texto do exercício; nenhuma outra informação é relevante para a resolução do exercício; mais informações são totalmente irrelevantes; o único propósito de apresentar o exercício é resolvê-lo (SKOVSMOSE, 2000, p. 9).

Skovsmose (2000, p.8) combina esses três contextos referenciais com dois paradigmas de sala de aula - Exercícios e Cenário para Investigação - e compõe uma matriz com seis tipos diferentes de ambientes de aprendizagem.

	Exercícios	Cenário para Investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semi-realidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Figura 1: Ambientes de aprendizagem

Os ambientes de aprendizagem (1), (3) e (5) são caracterizados por exercícios apresentados com referências à matemática pura, semirrealidade e realidade, respectivamente. Enquanto, os (2), (4) e (6) referem-se a cenário para investigação nessas mesmas referências.

No entanto, Skovsmose (2000) esclarece que esses ambientes de aprendizagem não são categorias fechadas, independentes, como apresentadas nessa matriz:

> A linha vertical que separa o paradigma do exercício dos cenários para investigação é, por certo, um linha muito “espessa”, simbolizando um terreno imenso de possibilidades”. Alguns exercícios podem provocar actividades de resolução de problemas, as quais poderiam transformar-se em genuínas investigações matemáticas. Propor problemas significa um passo adiante em direcção aos cenários para investigação, embora actividades de formulação de problemas possam ser muito diferentes de um trabalho de projecto. Não há dúvida de que as linhas horizontais também são “fluidas”. Não pretendo tentar oferecer uma classificação claramente determinada, mas elaborar uma noção de ambientes de aprendizagem tendo em vista facilitar as discussões sobre mudanças na educação matemática (p.13).

Contudo, o processo de ensino e aprendizagem de Matemática não necessariamente precisa se restringir a um ou a outro ambiente de aprendizagem. Ponte (2010) afirma que nem todos os conteúdos matemáticos podem ser ensinados por meio da investigação matemática. Skovsmose (2000) acrescenta que não devemos abandonar totalmente os exercícios no ensino de matemática. Nesse sentido, as práticas pedagógicas de matemática devem mover-se entre os diferentes ambientes de aprendizagem.

Consideramos que, na prática pedagógica, pode-se criar um *ambiente de investigação*, que seria uma estratégia de criar-se na aula, de forma rotineira, condições que propiciam ao aluno criar hipóteses, testá-las, questionar as soluções, propor alternativas e se expressar de maneira adequada. Indo além da mera utilização esporádica de atividades de investigação.

Essas condições seriam construídas no cotidiano da sala de aula, convidando os alunos a refletir sobre as soluções propostas para as atividades, mesmo que sejam exercícios fechados; a alterar as condições dadas no enunciado de um problema, propondo um novo olhar sobre o mesmo, por meio de problemas que permitem mais de uma interpretação ou que possuem excesso ou falta de dados. Essas estratégias, que mantém a aula fora da "zona de conforto", permitem que o aluno assuma uma postura crítica sobre os conceitos e sobre as estratégias propostas.

Vamos apresentar a seguir um exemplo de como trabalhar um problema que permite mais de uma interpretação e que gera um *ambiente de investigação*.

Um problema

O problema que analisaremos, reproduzido a seguir, está inserido em uma lista de atividades propostas antes da discussão e sistematização de conceitos de funções. É sugerido aos alunos, organizados em grupos, a resolução dos problemas dessa lista. O objetivo da mesma é explorar os conhecimentos prévios dos alunos, que podem propiciar a discussão do conceito a ser abordado, no caso, funções.

PROBLEMA

Na copiadora Copião o preço do Xerox é determinado pelo número de cópias da seguinte maneira:

- De 1 a 100 cópias – R$ 0,10 por cópia;
- De 101 a 200 cópias – R$ 0,08 por cópia;
- A partir de 201 – R$ 0,06 por cópia

Determine quanto uma pessoa irá pagar para se tirar:

a) 25 cópias
b) 150 cópias
c) 230 cópias

→ Esboce um gráfico que represente esse problema, determine uma lei que modela a situação e identifique as variáveis.

→ No problema, podemos ter mais de uma maneira de interpretar o enunciado. Em ambos os casos, dado um valor é possível determinar o número de cópias? Se sim

determine como isso pode ser feito, se não de um exemplo.

O problema proposto, aparentemente, pode ser classificado como um problema fechado, segundo Ponte (2010), e contextualizado na semirrealidade, segundo Skovsmose (2000). Nessa classificação, ele seria trabalhado como atividade de fixação, no *paradigma de exercícios* (SKOVSMOSE, 2000), ou seja, seria proposto após a exposição dos conceitos e exemplos pelo professor. Entretanto, a maneira como esse problema é abordado, nesse colégio, altera essa lógica, pois ele é apresentado em atividades exploratórias, antes dos conceitos serem discutidos. Dessa forma, a classificação acima, com base nesses autores, se altera, o que será objeto da nossa discussão a seguir.

A solução comumente apresentada pelos alunos se baseia na ideia do conhecimento cotidiano que eles possuem sobre a cobrança das empresas de reprografia (Xerox), de modo geral. Que é a seguinte:
Para resolver os itens a), b) e c), sugeridos no problema, os alunos consideram que basta multiplicar o número de cópias pelo preço de cada cópia, segundo enunciado. No caso, o preço total a ser pago é calculado diretamente: 25.(0,10) = 2,50; 150.(0,08) = 12,00 e 230.(0,06) = 13,80, respectivamente. Esses cálculos fornecem um preço segundo um número de cópias determinado.

Com relação ao gráfico e a lei solicitados no problema, os alunos encontram várias dificuldades. Por exemplo, constroem gráficos de linha, que desconsideram o domínio discreto do problema; representam a lei que modela o problema sem usar linguagem matemática.

O problema, intencionalmente, possui dupla interpretação que é explicitada na última questão colocada. A intenção dessa questão é suscitar a discussão de outra interpretação do problema, quando essa não surgiu em nenhum grupo de alunos durante a resolução da atividade.

Nessa segunda interpretação, que poucos alunos apresentam inicialmente, considera-se que as 100 primeiras cópias custarão sempre R$0,10 cada. Para números de cópias de 101 a 200, considera-se o valor de R$10,00 das 100 primeiras cópias (100 x 0,10) acrescido de R$0,08 por cópia excedente. Para quantidades superiores a 200, considera-se o valor de R$18,00 das 200 primeiras cópias (100 x 0,10 + 100 x 0,08) acrescido de R$0,06 por cópia excedente.

PRIMEIRA INTERPRETAÇÃO	SEGUNDA INTERPRETAÇÃO
$P = \begin{cases} R\$\,0{,}10\,n, & \text{se } 0 \le n \le 100 \\ R\$\,0{,}08\,n, & \text{se } 100 < n \le 200 \\ R\$\,0{,}06\,n, & \text{se } n > 200 \end{cases}$	$P = \begin{cases} 0{,}10\,n, & \text{se } 0 \le n \le 100 \\ 10 + 0{,}08\,(100 - n), & \text{se } 100 < n \le 200 \\ 18 + 0{,}06\,(200 - n), & \text{se } n > 200 \end{cases}$
P é o preço total a ser pago e n é o número de cópias ($n \in N$).	

A comparação das duas interpretações propicia uma rica discussão na sala de aula, pois as diferenças entre esses modelos possibilitam a exploração de vários conceitos matemáticos que serão sistematizados posteriormente. É essa discussão que permite considerarmos que esse problema possa ser classificado como uma atividade de investigação matemática. A seguir apresentamos algumas questões que ajudam a explorar alguns conceitos a partir desse problema.

Para introduzir a ideia de função inversa e a necessidade da injetividade para a determinação da mesma, pode-se utilizar a questão: “Em ambos os casos, dado um valor é possível determinar o número de cópias?”. Inicialmente, é comum os alunos darem uma resposta afirmativa. Entretanto, o professor reabre a discussão, solicitando a determinação do número de cópias a partir de alguns valores. Por exemplo: “Quantas cópias correspondem a R$10,00, em cada uma das interpretações?”. Na primeira interpretação encontram-se duas quantidades de cópias, pois por 100 ou 125 cópias se pagaria a mesma quantia de R$10,00 (100 x 0,10 = 125 x 0,08 = 10). Já na segunda interpretação, encontra-se apenas uma quantidade de cópias, 100. Com esse resultado, o professor pode estender a discussão para a possibilidade de, nesta função, ser possível inverter as variáveis independente e dependente.

Outra questão que gera uma discussão importante é sobre a análise do que ocorre com os gráficos que representam cada uma das funções. Como, em geral, os alunos costumam utilizar um gráfico de linha para representar a função, o professor questiona sobre a continuidade do domínio e do conjunto imagem. Essa questão gera uma discussão sobre a representação gráfica de funções cujo domínio ou contradomínio sejam conjuntos discretos.

Outras discussões advindas dessa questão podem ser exploradas, como, por exemplo, os "saltos" que existem no gráfico da primeira interpretação e a comparação dos modelos encontrados com o uso de problemas semelhantes no cotidiano.

Considerações

Ao longo dessa discussão, a partir dos conceitos de *cenários para investigação* (SKOVSMOSE, 2000) e atividades de *investigação matemática* (PONTE, 2010), apresentamos a ideia de *ambiente de investigação*. Discutimos como um problema do "paradigma do exercício", quando trabalhado em um ambiente de investigação, pode se tornar uma atividade investigativa.

Essa mudança de paradigma só foi possível por meio da organização da sala de aula; da sequência de questões, que foram introduzidas pelo professor; da abertura à discussão, incentivada aos alunos; e, principalmente, da intencionalidade do professor, ao organizar a atividade, visando criar esse *ambiente de investigação*.

No problema analisado, essa intencionalidade se revela em alguns elementos, como: a ambiguidade do enunciado, as questões que foram introduzidas e a relação entre as formas de resolução e o cotidiano.

Referências

Cunha, H.; Oliveira, H.; Ponte, J. P. (1995). Investigações matemáticas na sala de aula. *Actas do ProfMat95*, 161-167.

Ponte, J. P. (2010). Explorar e Investigar em Matemática: Uma Actividade Fundamental no Ensino e na Aprendizagem. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 21, 13-30.

Ponte, J. P.; Ferreira, C.; Brunheira, L.; Oliveira, H.; Varandas, J. (1998). *Investigando as Aulas de Investigações Matemáticas*. http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto12.PDF. Consultado 25/04/2013.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para Investigação. *Bolema*, 14, 66-91.